数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 177-187

ファジィ意志決定過程と最適方程式

九大数理　　藤田敏治 (Toshiharu Fujita)

ファジィ環境下における意思決定過程が最初に扱われたのは Bellmann and Zadeh の論文 [1] においてである．それは、各ステージにおける評価がファジィで与えられる決定過程であり，状態推移に関しては，確定的な場合，及び確率的な場合が扱われている．我々は有限ステージで考えられていた彼らの問題を，無限ステージに拡張して最適方程式を導き，最適値について考察する．そして今回はもう一つ，ファジィで状態推移が与えられる場合についても考える．この状態推移に関しては [1] において概念提起のみはなされていたが，詳細については何も述べられていなかった．最近 Iwamoto and Sniedvich [3] においてファジィ推移法則が定式化されており，我々は，その推移法則に基づいて議論を展開する．またここでは状態推移が確定的な場合，確率的な場合，及びファジィで与えられる場合について，ときに「ファジィ環境下における」を省略して，それぞれ確定的意思決定過程，確率的意思決定過程，ファジィ意思決定過程と呼ぶこととする．

なお，最小演算子 $\wedge$ ，最大演算子 $\vee$ を次のように定義する:

$$a \wedge b := \mathrm{Min}(a, b), \qquad a \vee b := \mathrm{Max}(a, b)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i := \mathop{\mathrm{Min}}_{i=1,2,\cdots,n} a_i, \qquad \bigvee_{i=1}^{n} a_i := \mathop{\mathrm{Max}}_{i=1,2,\cdots,n} a_i$$

無限個の最小値 (下限) 及び最大値 (上限) についても次のようにあらわす：

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} a_i := \mathop{\mathrm{Inf}}_{i=1,2,\cdots} a_i, \qquad \bigvee_{i=1}^{\infty} a_i := \mathop{\mathrm{Sup}}_{i=1,2,\cdots} a_i$$

1　確定的意思決定過程

冒頭述べたように，ファジィ環境下における意志決定過程で確定的な場合について，最初に扱われたのは [1] においてである．そこでは有限ステージの問題が定式化され，再帰式が導かれている．以下に，多少表現の違いはあるが [1] で扱われている問題を述べる．状態集合を $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$, 入力集合を $U = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ とし，状態推移が $f : X \times U \to X$ で与えられる決定過程を考える．また $x_t \in X$ で時刻 $t = 0, 1, \cdots$ における状態を，$\pi_t \in \Pi := \{\pi \mid \pi : X \to U\}$ で時刻 $t = 0, 1, \cdots$ における決定関数をあらわし $\mu_t : X \times U \to [0, 1]$ を時刻 t における $X \times U$ 上の利得をあらわすファジィ集合のメンバーシップ関数，$\mu_G : X \to [0, 1]$ を終端利得をあらわすファジィ集合のメンバーシップ関数とする．なお，$u_t \in U$, $t = 0, 1, \cdots$ で時刻 t における状態 x_t に対し π_t によりくだされる決定をあらわす (i.e. $u_t = \pi_t(x_t)$)．このとき，初期状態 x_0 から始まり f により次の状態が

確定的に定まっていく有限段の決定過程を考え，各ステージにおけるファジィ利得の交わりを最大にすることを問題とする．すなわち，次の形の問題を考える:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi} &[\mu_0(x_0,u_0)\wedge\mu_1(x_1,u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})\wedge\mu_G(x_N)]\\ \text{s.t.}\quad & x_{t+1}=f(x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1\\ & u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

この問題に対する詳細は [1] に譲るとし，無限ステージ問題を考える．ただし各ステージにおける利得のメンバーシップ関数は同一のものとし，μ であらわす.

$$\operatorname*{Sup}_{\pi_0,\pi_1,\cdots\in\Pi}[\mu(x_0,u_0)\wedge\mu(x_1,u_1)\wedge\mu(x_2,u_2)\wedge\cdots] \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_{t+1}=f(x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots\\ & u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots.\end{aligned}$$

これが無限ステージ問題として一番自然な形であろう．さらにここでは，次の二つの問題もあわせて考える.

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi}[\mu(x_0,u_0)\wedge\cdots\wedge\mu(x_{N-1},u_{N-1})\wedge\mu_G(x_N)] \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_{t+1}=f(x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1\\ & u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi}[\mu(x_0,u_0)\wedge\cdots\wedge\mu(x_{N-1},u_{N-1})] \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_{t+1}=f(x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1\\ & u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

ここにあげた三つの問題は一見，同様に扱えるかのように思える．実際，問題 (1) と問題 (3) については共に最適値が存在し等しい．しかしながら，問題 (2) は違った振る舞いを見せ，最適値は必ずしも存在すると限らない．ただし，以下に定義される最適値関数はいずれも同じ形の最適方程式を満たす. (s.t. 以下は省略)

$$\begin{aligned}\mu_D^*(x_0) &:= \operatorname*{Sup}_{\pi_0,\pi_1,\cdots\in\Pi}[\mu(x_0,u_0)\wedge\mu(x_1,u_1)\wedge\mu(x_2,u_2)\wedge\cdots],\quad x_0\in X\\ \tilde{\mu}_D^\infty(x_0) &:= \lim_{N\to\infty}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi}[\mu(x_0,u_0)\wedge\cdots\wedge\mu(x_{N-1},u_{N-1})\wedge\mu_G(x_N)],\quad x_0\in X\\ \bar{\mu}_D^\infty(x_0) &:= \lim_{N\to\infty}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi}[\mu(x_0,u_0)\wedge\cdots\wedge\mu(x_{N-1},u_{N-1})],\quad x_0\in X\end{aligned}$$

ここで，$\tilde{\mu}_D^\infty(x_0)$ は，すべての $x_0\in X$ に対し右辺の値が存在するときのみ定義されるものとする．このとき，次の定理が成り立つ.

Theorem 1.1 $\mu_D^*(x_0),\tilde{\mu}_D^\infty(x_0),\bar{\mu}_D^\infty(x_0)$ はそれぞれ，次の最適方程式を満たす.

$$\begin{aligned}\mu_D^*(x_0) &= \operatorname*{Max}_{u\in U}[\mu(x_0,u)\wedge\mu_D^*(f(x_0,u))],\quad x_0\in X\\ \tilde{\mu}_D^\infty(x_0) &= \operatorname*{Max}_{u\in U}[\mu(x_0,u)\wedge\tilde{\mu}_D^\infty(f(x_0,u))],\quad x_0\in X\\ \bar{\mu}_D^\infty(x_0) &= \operatorname*{Max}_{u\in U}[\mu(x_0,u)\wedge\bar{\mu}_D^\infty(f(x_0,u))],\quad x_0\in X\end{aligned}$$

2 確率的意思決定過程

最初に，有限ステージの場合について問題を述べる．これは，基本的に [1] で扱われている問題である．変数，集合等諸条件は前節に同じとする．ただし $x_{t+1} \sim p(\cdot|x_t, u_t)$ で時刻 t における状態が x_t，入力が u_t であるときに，時刻 $t+1$ で x_{t+1} という状態に確率 $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$ で推移することをあらわす．そして状態が確率的に推移していくので，全体の評価としては期待値をとり，その最大化を考える．

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi} & E\left[\mu_0(x_0,u_0)\wedge\mu_1(x_1,u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})\wedge\mu_N(x_N)\right] \\ \text{s.t.}\quad & x_{t+1}\sim p(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1 \\ & u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

この問題に関する正確な再帰式は [2] において与えられている．その際，新たなパラメーター λ を導入する必要があり，すなわち次のような問題を考える．

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi} & E\left[\lambda\wedge\mu_0(x_0,u_0)\wedge\mu_1(x_1,u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})\wedge\mu_N(x_N)\right] \\ \text{s.t.}\quad & x_{t+1}\sim p(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1 \\ & u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

なお，容易にわかるように $\lambda=1$ と置くともとの問題と同値になるので，この問題は元の問題を含む．この不変埋没原理に基づく考えは，無限ステージにおいても必要であり，λ を導入しなければ，有限ステージの場合と同様再帰式を導くことはできない．したがって，無限ステージで状態推移が確率的に与えられる場合，次の問題を考える．

$$\begin{aligned}\operatorname*{Sup}_{\pi_0,\pi_1,\cdots\in\Pi} & E\left[\lambda\wedge\mu(x_0,u_0)\wedge\mu(x_1,u_1)\wedge\mu(x_2,u_2)\wedge\cdots\right] \\ \text{s.t.}\quad & x_{t+1}\sim p(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots \\ & u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots.\end{aligned}$$

さらに確定的意思決定過程の時と同じく，有限ステージ問題に対する最適値の極限として定義した二つの問題をあわせて考えることとし，初期状態 $x_0\in X$ に対して次の三つの最適値関数を考える．

$$\begin{aligned}\mu_S^*(x_0;\lambda) \quad := \quad & \operatorname*{Sup}_{\pi_0,\pi_1,\cdots\in\Pi} E\left[\lambda\wedge\mu(x_0,u_0)\wedge\mu(x_1,u_1)\wedge\mu(x_2,u_2)\wedge\cdots\right] \\ & \text{s.t.}\quad x_{t+1}\sim p(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots \\ & \qquad u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_S^\infty(x_0;\lambda) \quad := \quad & \lim_{N\to\infty}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi} E\left[\lambda\wedge\mu(x_0,u_0)\wedge\cdots\wedge\mu(x_{N-1},u_{N-1})\wedge\mu_G(x_N)\right] \\ & \text{s.t.}\quad x_{t+1}\sim p(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1 \\ & \qquad u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_S^{\infty}(x_0;\lambda) \quad &:= \quad \lim_{N\to\infty} \underset{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi}{\mathrm{Max}} E\left[\lambda \wedge \mu(x_0,u_0) \wedge \cdots \wedge \mu(x_{N-1},u_{N-1})\right] \\ &\qquad\qquad \text{s.t.} \quad x_{t+1} \sim p(\cdot|x_t,u_t), \quad t=0,1,\cdots,N-1 \\ &\qquad\qquad\qquad u_t \in U, \quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

状態推移が確率的に与えられた場合，確定的な場合と状況が異なり，$\mu_S^*(x_0), \tilde{\mu}_S^{\infty}(x_0), \bar{\mu}_S^{\infty}(x_0)$ はいずれも存在する．ただしここでも，$\mu_S^*(x_0) = \bar{\mu}_S^{\infty}(x_0)$ であり，$\tilde{\mu}_S^{\infty}(x_0)$ の値は一般に異なるが，一方で，すべてが同じ形の最適方程式を満たす．

Theorem 2.1 $\mu_S^*(x_0)$, $\tilde{\mu}_S^{\infty}(x_0)$, $\bar{\mu}_S^{\infty}(x_0)$ はそれぞれ，次の最適方程式を満たす．

$$\begin{aligned}\mu_S^*(x_0;\lambda) &= \underset{u\in U}{Max} \sum_{x_1} \mu_S^*(x_1; \lambda \wedge \mu(x_0,u)) p(x_1|x_0,u), \quad x_0 \in X \\ \tilde{\mu}_S^*(x_0;\lambda) &= \underset{u\in U}{Max} \sum_{x_1} \tilde{\mu}_S^*(x_1; \lambda \wedge \mu(x_0,u)) p(x_1|x_0,u), \quad x_0 \in X \\ \bar{\mu}_S^*(x_0;\lambda) &= \underset{u\in U}{Max} \sum_{x_1} \bar{\mu}_S^*(x_1; \lambda \wedge \mu(x_0,u)) p(x_1|x_0,u), \quad x_0 \in X\end{aligned}$$

3 ファジィ意思決定過程

ここでは，[3] で導入されたファジィ状態推移法則と MINMAX 期待値を用い問題を定式化する．まず，ファジィ状態推移法則を $x_{t+1} \simeq \nu(\cdot|x_t,u_t)$ であらわす．これの意味するところは時刻 t における状態が x_t，入力が u_t であるときに，時刻 $t+1$ で x_{t+1} という状態に推移するメンバーシップ（帰属度）が $\nu(x_{t+1}|x_t,u_t)$ で与えられる，ということである．そして [3] において，状態推移がファジィで与えられる場合の有限ステージ問題における全体の評価としては次の **MINMAX 期待値**が考えられている．

$$\begin{aligned}&F\left[\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1}) \wedge \mu_N(x_N)\right] \\ :=& \bigvee_{x_1,x_2,\cdots,x_N} \left[\{\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1}) \wedge \mu_N(x_N)\}\right. \\ &\qquad \left.\wedge \{\nu(x_1|x_0,u_0) \wedge \nu(x_2|x_1,u_1) \wedge \cdots \wedge \nu(x_N|x_{N-1},u_{N-1})\}\right]\end{aligned}$$

このとき有限ステージファジィ意思決定過程は次のように定式化される：

$$\begin{aligned}&\underset{\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi}{\mathrm{Max}} F\left[\mu_0(x_0,u_0) \wedge \mu_1(x_1,u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1}) \wedge \mu_N(x_N)\right] \\ &\qquad \text{s.t.} \quad x_{t+1} \simeq \nu(\cdot|x_t,u_t), \quad t=0,1,\cdots,N-1 \\ &\qquad\qquad u_t \in U, \quad t=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

そこで無限ステージにおいては，MINMAX 期待値を次のように定義し

$$\begin{aligned}&F\left[\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots\right] \\ :=& \bigvee_{x_1,x_2,\cdots} \left[\{\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots\} \wedge \{\nu(x_1|x_0,u_0) \wedge \nu(x_2|x_1,u_1) \wedge \cdots\}\right]\end{aligned}$$

その最大化を考える．ここでもやはり，三つの問題を考える．

$$\mu_F^*(x_0) := \operatorname*{Sup}_{\pi_0,\pi_1,\cdots\in\Pi} F\left[\mu(x_0,u_0)\wedge\mu(x_1,u_1)\wedge\mu(x_2,u_2)\wedge\cdots\right] \tag{4}$$
$$\text{s.t.}\quad x_{t+1}\simeq\nu(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots$$
$$u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots$$

$$\tilde{\mu}_F^\infty(x_0) := \lim_{N\to\infty}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi} F\left[\mu(x_0,u_0)\wedge\cdots\wedge\mu(x_{N-1},u_{N-1})\wedge\mu_G(x_N)\right] \tag{5}$$
$$\text{s.t.}\quad x_{t+1}\simeq\nu(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1$$
$$u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1$$

$$\bar{\mu}_F^\infty(x_0) := \lim_{N\to\infty}\operatorname*{Max}_{\pi_0,\cdots,\pi_{N-1}\in\Pi} F\left[\mu(x_0,u_0)\wedge\cdots\wedge\mu(x_{N-1},u_{N-1})\right] \tag{6}$$
$$\text{s.t.}\quad x_{t+1}\simeq\nu(\cdot|x_t,u_t),\quad t=0,1,\cdots,N-1$$
$$u_t\in U,\quad t=0,1,\cdots,N-1$$

推移法則がファジィで与えられる場合は，確定的に与えられる場合と同様に (5) の右辺の値は必ずしも存在しない．よって，(5) は右辺が存在するときのみ定義されるものとする．ただし，ここでも $\mu_F^*(x_0)=\bar{\mu}_F^\infty(x_0)$ が成り立ち，$\mu_F^*(x_0),\tilde{\mu}_F^\infty(x_0),\bar{\mu}_F^\infty(x_0)$ は同じ形の最適方程式を満たす．

Theorem 3.1 $\mu_F^*(x_0),\tilde{\mu}_F^\infty(x_0),\bar{\mu}_F^\infty(x_0)$ はそれぞれ，次の最適方程式を満たす．

$$\mu_F^*(x_0) = \operatorname*{\mathit{Max}}_{u\in U}\left[\mu(x_0,u_0)\wedge\left\{\bigvee_{x_1}\left(\mu_F^*(x_1)\wedge\nu(x_1|x_0,u_0)\right)\right\}\right],\qquad x_0\in X$$
$$\tilde{\mu}_F(x_0) = \operatorname*{\mathit{Max}}_{u\in U}\left[\mu(x_0,u_0)\wedge\left\{\bigvee_{x_1}\left(\tilde{\mu}_F(x_1)\wedge\nu(x_1|x_0,u_0)\right)\right\}\right],\qquad x_0\in X$$
$$\bar{\mu}_F(x_0) = \operatorname*{\mathit{Max}}_{u\in U}\left[\mu(x_0,u_0)\wedge\left\{\bigvee_{x_1}\left(\bar{\mu}_F(x_1)\wedge\nu(x_1|x_0,u_0)\right)\right\}\right],\qquad x_0\in X$$

4 最適方程式

第１節から第３節において推移法則が確定的，確率的，ファジィの場合についてそれぞれ，最適方程式を導いた．本節では，これらの最適方程式がどのような**MINMAX(関数)方程式**（最小演算子'$\wedge$'，最大演算子'$\vee$'を持つ方程式を特にこう呼ぶことにする）を満たすかを考える．なお各状態推移に対しそれぞれ三つの問題を考え三つの最適方程式を導いたが，式の形自体は同じであったので，μ_D^*,μ_S^*,μ_F^*についてのみ考える．

<u>**推移法則が確定的な場合**</u>

第１節より，μ_D^*は次の最適方程式を満たす：

$$\mu_D^*(x_0) = \operatorname*{Max}_{u\in U}\left[\mu(x_0,u)\wedge\mu_D^*(f(x_0,u))\right],\quad x_0\in X$$

ここで，$x_0 \in X = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$，$u \in U = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ であったので，

$$\mu_D^*(\sigma_i) = \underset{k=1,2,\cdots,m}{\mathrm{Max}} \left[\mu(\sigma_i, \alpha_k) \wedge \mu_D^*(f(\sigma_i, \alpha_k))\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

とあらわせる．また $I(i,j) := \{k \mid f(\sigma_i, \alpha_k) = \sigma_j\}$ と定義すると

$$\mu_D^*(\sigma_i) = \underset{j=1,2,\cdots,n; I(i,j)\neq\phi}{\mathrm{Max}} \left[\underset{k\in I(i,j)}{\mathrm{Max}} \{\mu(\sigma_i, \alpha_k)\} \wedge \mu_D^*(\sigma_j))\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

よって

$$v_{ij} := \begin{cases} \mathrm{Max}\{\mu(\sigma_i, \alpha_k) \mid k \in I(i,j)\}, & I(i,j) \neq \emptyset \\ 0, & I(i,j) = \emptyset \end{cases} \tag{7}$$

とおくことにより

$$\mu_D^*(\sigma_i) = \underset{j=1,2,\cdots,n}{\mathrm{Max}} (v_{ij} \wedge \mu_D^*(\sigma_j)), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

が得られる．よって，**MINMAX 方程式**:

$$x_i = \bigvee_{j=1}^{n} (v_{ij} \wedge x_j), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

の解 x_i が $\mu_D^*(\sigma_i)$ に対応することがわかる．

推移法則が確率的な場合

第２節より，μ_S^*は次の最適方程式を満たす：

$$\mu_S^*(x_0; \lambda) \;=\; \underset{u\in U}{\mathrm{Max}} \sum_{x_1} \mu_S^*(x_1; \lambda \wedge \mu(x_0, u)) p(x_1|x_0, u), \quad x_0 \in X, \ \lambda \in [0,1]$$

ここで，$x_0, x_1 \in X = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$，$u \in U = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ より，

$$\mu_S^*(\sigma_i; \lambda) = \underset{k=1,2,\cdots,m}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{n} \mu_S^*(\sigma_j; \lambda \wedge \mu(\sigma_i, \alpha_k)) p(\sigma_j|\sigma_i, \alpha_k), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \ \lambda \in [0,1]$$

とあらわせ，

$$w_i^k := \mu(\sigma_i, \alpha_k), \quad p_{ij}^k := p(\sigma_j|\sigma_i, \alpha_k) \tag{9}$$

とおくと

$$\mu_S^*(\sigma_i; \lambda) = \underset{k=1,2,\cdots,m}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \mu_S^*(\sigma_j; \lambda \wedge w_i^k), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \ \lambda \in [0,1].$$

よって $f_i(\lambda) := \mu_S^*(\sigma_i; \lambda)$ とおいて得られる **MINMAX 関数方程式**:

$$f_i(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k f_j(\lambda \wedge u_i^k)\right], \quad \lambda \in [0,1], \ i = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

を解くことができれば $\mu_S^*(\sigma_i;\lambda)$ が求められることがわかる.

推移法則がファジィの場合
第３節より，μ_F^*は次の最適方程式を満たす：

$$\mu_F^*(x_0) \;=\; \operatorname*{Max}_{u\in U}\left[\mu(x_0,u_0)\wedge\left\{\bigvee_{x_1}(\mu_F^*(x_1)\wedge\nu(x_1|x_0,u_0))\right\}\right],\qquad x_0\in X$$

ここで，$x_0,x_1\in X=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$，$u\in U=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ より，$\mu_F^*(x_0)$ は

$$\mu_F^*(\sigma_i)=\operatorname*{Max}_{k=1,2,\cdots,m}\bigvee_{j=1,2,\cdots,n}[\mu(\sigma_i,\alpha_k)\wedge\mu_F^*(\sigma_j)\wedge\nu(\sigma_j|\sigma_i,\alpha_k)],\qquad i=1,2,\cdots,n$$

とあらわせ

$$z_{ij}:=\operatorname*{Max}_{k=1,2,\cdots,m}[\mu(\sigma_i,\alpha_k)\wedge\nu(\sigma_j|\sigma_i,\alpha_k)] \tag{11}$$

とおくと

$$\mu_F^*(\sigma_i)=\bigvee_{j=1,2,\cdots,n}[z_{ij}\wedge\mu_F^*(\sigma_j)],\qquad i=1,2,\cdots,n$$

よって，$\mu_F^*(\sigma_i)$ は次の **MINMAX 方程式**の解となる.

$$x_i=\bigvee_{j=1}^{n}(z_{ij}\wedge x_j),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

5 MINMAX 方程式

本節では MINMAX 方程式の考察を通して，最適値$\mu_D^*(x_0)$，$\tilde{\mu}_D^\infty(x_0)$，$\bar{\mu}_D^\infty(x_0)$，$\mu_F^*(x_0)$，$\tilde{\mu}_F^\infty(x_0)$, $\bar{\mu}_F^\infty(x_0)$ について考える．最初に，次のファジィ行列積を定義する.

Definition 5.1 （ファジィ行列積） $A=(a_{ij}):m\times n$ 行列, $B=(b_{ij}):n\times l$行列 とする．このとき，A と B の積 AB の (i,j) 成分を

$$\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$$

で定義する.

以後本節において，行列の積は特に断らない限りファジィ行列積とする．このとき，MINMAX 方程式:

$$x_i=\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij}\wedge x_j),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

は $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, A=(a_{ij})$ とおくことにより

$$x=Ax$$

という形にあらわされる．ここで注意しなければならないのは MINMAX 方程式は必ずしも一意解を持つわけでは無い，という点である．そこで，MINMAX 方程式の解全体を $S(A)$ とおく．

$$S(A) := \{x \in [0,1]^n \mid x = Ax\}$$

このとき，$S(A)$ は A の成分 a_{ij} を用いて次のようにあらわすことができる：

$$S(A) = \left\{ x \in [0,1]^n \;\middle|\; \bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_{ij} \wedge x_j) \le x_i \le a_{ii} \vee \left(\bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_{ij} \wedge x_j) \right),\ i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

この表現を用いることにより，例えば 2×2 行列 A に対し $x = Ax$ の解全体を簡単に図示することができる．

それでは次に $x_0 \in [0,1]^n$ を与え，

$$x_l = Ax_{l-1}, \qquad l = 1, 2, \cdots$$

なる列を考える．$x_l = A^l x_0$ であるが A^l は収束するとは限らないため，列 $\{x_l\}$ は必ずしも収束しない．

Example 5.1
$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix} = A^2$$

となり収束 (A^2以降一定) するが，$B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$ とすると

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad B^4 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = B^2$$

で，収束しない． □

上記の例で，BはB^2以降，B^2とB^3の繰り返しになっている．この繰り返しの個数を**周期**と呼ぶ．Bは周期が 2 である．一般に次の定理が成り立つ．

Theorem 5.1 n を任意の自然数とする．このとき任意の $n \times n$ 行列 A について次のいずれかが成り立つ．

(i) $\lim_{l \to \infty} A^l$ が存在

(ii) A^l は周期をなす

(特に (i) の場合，ある L が存在し $l > L$ に対し A_lは一定値になる.)

定理でも述べられているようにA^lは必ずしも収束しないが，もし，

$$\lim_{l\to\infty} x_l = \lim_{l\to\infty} A^l x_0$$

が存在すれば，その値が $x = Ax$ の解となることは明らか.（なお，A^lが収束すれば当然 x_l も収束するが，A^lが収束しなくても x_lは収束しうることもある.）よって，

$$X := \left\{ x \in [0,1]^n \;\middle|\; \lim_{l\to\infty} A^l x \text{ が存在 } \right\}$$

とおくと，$x = Ax$ の解全体 $S(A)$ は

$$S(A) = \left\{ \lim_{l\to\infty} A^l x \;\middle|\; x \in X \right\}$$

と表すことができる．ここで $x = (1, 1, \cdots, 1)$ について，実は $x \in X$ で次の定理が成り立つ.

Theorem 5.2
(i) $x = (1, 1, \cdots, 1)$ と置く．このとき $x \in X$ 即ち

$$\lim_{l\to\infty} A^l x$$

は必ず存在し，その値は $a_{ij} = v_{ij}$ の時，最適値 $\mu_D^*(x_0) = \bar{\mu}_D^\infty(x_0)$ を与え，$a_{ij} = z_{ij}$ の時，$\mu_F^*(x_0) = \bar{\mu}_F^\infty(x_0)$ を与える．ただし，v_{ij}, z_{ij} はそれぞれ (7),(11) で定義.
(ii) $x = (\mu_G(\sigma_1),\ \mu_G(\sigma_2), \cdots, \mu_G(\sigma_n))$ と置くと一般に $x \in X$ は成り立たず，

$$\lim_{l\to\infty} A^l x$$

は必ずしも存在しない．だが，もし $a_{ij} = v_{ij}$，$a_{ij} = z_{ij}$ とおいた際，存在すれば最適値 $\tilde{\mu}_D^\infty(x_0)$，$\tilde{\mu}_F^\infty(x_0)$ をそれぞれ与える.

6 MINMAX 関数方程式

最後に，最適値関数 $\mu_S^*(x_0), \tilde{\mu}_S^\infty(x_0), \bar{\mu}_S^\infty(x_0)$ について考える．これらの満たす最適方程式はいずれも MINMAX 関数方程式 (10) であった．このことを頼りに，我々は最適値のとりうる範囲について考察する．まず，ある条件下で $f_i(\lambda)$ が MINMAX 関数方程式を満たす必要十分条件を述べる.

Theorem 6.1

$$p_{ij}^k \in (0, 1), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,\ \ k = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^k = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n,\ \ k = 1, 2, \cdots, m,$$

$$u_i^k \in [0,1], \quad i = 1, 2, \cdots, n, \ k = 1, 2, \cdots, m.$$

とする．このとき，

$$f_i(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k f_j(\lambda \wedge u_i^k) \right], \quad \lambda \in [0,1], \ i = 1, 2, \cdots, n$$

を満たす f_i $(i \in N_n)$ の必要十分条件は次で与えられる．

（条件１） $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \cdots = f_n(\lambda), \quad {}^\forall\lambda \in \left[0, \ \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{m} u_i^k\right]$

（条件２） $f_j(\lambda) = f_1\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{m} u_i^k\right), \quad {}^\forall\lambda \in \left[\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{m} u_i^k, \ 1\right], \ {}^\forall j = 1, 2, \cdots, n$

（条件３） ${}^\forall i = 1, 2, \cdots, n, \ {}^\forall k = 1, 2, \cdots, m$ に対して，$\lambda \geq u_i^k \implies f_1(\lambda) \geq f_1(u_i^k)$

上記の定理を用いると，最適値 $\mu_S^*(x_0), \tilde{\mu}_S^\infty(x_0), \bar{\mu}_S^\infty(x_0)$ に関し次の定理が成り立つことが導かれる．

Theorem 6.2 Theorem 6.1 の仮定が満たされているとする．このとき
(i) パラメーターλを埋め込んだ無限ステージ確率的意思決定過程の最適値$\mu_S^*(x_0;\lambda)$ $(= \bar{\mu}_S^\infty(x_0;\lambda))$ は初期状態 x_0 によらず

$$\lambda \wedge \left(\bigvee_{k=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} u_i^k\right) \leq \mu_S^*(x_0;\lambda) \leq \lambda \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{m} u_i^k\right)$$

を満たすことが示される．よって$\lambda = 1$ とおいた元の問題の最適値 $\mu_S^*(x_0;1)$ は，

$$\bigvee_{k=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} u_i^k \leq \mu_S^*(x_0;1) \leq \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{m} u_i^k$$

を満たす．
(ii) 一方，最適値 $\tilde{\mu}_S^\infty(x_0;\lambda)$ は初期状態 x_0 によらず

$$\lambda \wedge \left(\bigvee_{k=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} u_i^k\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_G(\sigma_i)\right) \leq \tilde{\mu}_S^\infty(x_0;\lambda) \leq \lambda \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{m} u_i^k\right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mu_G(\sigma_i)\right)$$

を満たし，よって

$$\left(\bigvee_{k=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} u_i^k\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_G(\sigma_i)\right) \leq \tilde{\mu}_S^\infty(x_0;1) \leq \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{m} u_i^k\right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \mu_G(\sigma_i)\right)$$

が成り立つ．

7 まとめ

今回三つの推移法則を用いて，無限ステージでファジィ環境下における意思決定過程を考えた．そして，それぞれの満たす最適方程式から最適値，あるいは最適値の範囲を調べた．しかしこれらの最適方程式は最小演算子や最大演算子を含む特殊な方程式であり，その取り扱いには，もう少し詳しい議論が必要であろう．ここでの結果を第一ステップとして，より掘り下げた考察を行いたい．また今回は最適値のみに着目してきたが，実際は最適政策がどのようになるかというのも大きな問題であり，今後の課題としたい．

参考文献

[1] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A.: Decision-making in a fuzzy environment, Management Science, Vol.17,(1970), B141-B164.

[2] Iwamoto, S. and Fujita, T.: Stochastic decision-making in a fuzzy environment, to appear in J. Operations Res. Soc. Japan.

[3] Iwamoto, S. and Sniedovich, M.: Fuzzy decision-making in a fuzzy environment, under consideration.